数理解析研究所講究録
第 705 巻 1989 年 1-27

Robinson-Schensted 対応と left cell

東京商船大　有木 進

ここでは、 G. Lusztig の *left cell* の理論によく取り上げられる例、すなわち対称群の *left cell* への分割は、 *Q-symbol* による同値類別に一致するということ (本文中の定理A)、および *left cell* と *primitive ideal* の関係 (本文中の定理B、定理C) などを証明付きで紹介します。
Robinson-Schensted 対応の用語については、寺田君の用語に従います。

1. まずは紹介したい話を。

P-symbol と Q-symbol.　$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とし、その元 w を、 $w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$ のとき $w_1 w_2 \cdots w_n$ なる 1 から n までの自然数の列と同一視します。 そして $P(w) = \emptyset \leftarrow w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow .. \leftarrow w_n$, $Q(w) = P(w^{-1})$ により、 w の *P-symbol* と *Q-symbol* を定義します。

例. $w = 31524$ ならば、

$$P(w) = \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{matrix} \qquad Q(w) = \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{matrix}$$

KL 多項式.　他方、 Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ばれる多項式は次のように定義されます。

2

まず q を不定元とし、$\mathfrak{S}_n$の Hecke 環を

$$(T_{s_i}+1)(T_{s_i}-q)=0$$
$$T_{s_i}T_{s_{i+1}}T_{s_i}=T_{s_{i+1}}T_{s_i}T_{s_{i+1}}$$
$$T_{s_i}T_{s_j}=T_{s_j}T_{s_i} \quad (|\, i-j \,|>1)$$

を基本関係にもつ $\mathbb{Q}(q)$ 上の *associative algebra* とする。 ここで $s_i=(i,i+1)$ は $\mathfrak{S}_n$ の生成元。 また、$w=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ を wの最短表示とするとき、$T_w=T_{s_1}T_{s_2}\cdots T_{s_r}$ とおけば、$\{\, T_w \mid w\in\mathfrak{S}_n \,\}$ が Hecke 環の基底を与える。

定義. 次の 2 つの条件を満たす多項式 $P_{y,w}(q)$ がただ 1 つ存在する。これを KL 多項式という。 ただし、$y<w$ 等は Bruhat order である。

(1)
$$C_w=\sum_{y\le w}(-1)^{l(w)-l(y)}q^{\frac{l(w)}{2}-l(y)}P_{y,w}(q^{-1})\,T_y$$
$$=\sum_{y\le w}(-1)^{l(w)-l(y)}q^{-\frac{l(w)}{2}+l(y)}P_{y,w}(q)\,T_{y^{-1}}^{-1}$$

(2) $P_{y,w}(q)$ は qの多項式で、$P_{w,w}(q)=1$ かつ、

$y<w$のとき次数は $\dfrac{l(w)-l(y)-1}{2}$ 以下。

$P_{y,w}(q)$ の $\frac{l(w)-l(y)-1}{2}$ 次の係数を $\mu(y,w)$ とおき、$y<w$ かつ $\mu(y,w)\neq 0$ のとき $y\prec w$ とかきます。

そして、$y=x_1, \ldots, x_r=w$ に対し、

$\mathcal{L}(x_i)=\{s_j \mid s_jx_i<x_i\}\nsubseteq\mathcal{L}(x_{i+1})$ で $x_i\prec x_{i+1}$ または $x_{i+1}\prec x_i$

のとき、$y \underset{L}{\leq} w$ とかきます。 また、$y \underset{L}{\leq} w$ かつ $w \underset{L}{\leq} y$ のとき、$y \underset{L}{\sim} w$ とかき、この同値関係による $\mathfrak{S}_n$ の同値類を *left cell* とよびます。

さて実は上の定義における $P_{y,w}(q)$ の *welldefinedness* は、

$s_i w < w$ のとき、C_w を

$$(1.1) \qquad C_w = C_{s_i} C_{s_i w} - \sum_{\substack{z \prec s_i w \\ s_i z < z}} \mu(z, s_i w)\, C_z$$

という式、つまり、$C_{s_i} = q^{-\frac{1}{2}} T_{s_i} - q^{\frac{1}{2}}$ に注意すれば、

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} P_{y,w}(q) = {} & q^{1-c} P_{s_i y, s_i w}(q) + q^c P_{y, s_i w}(q) \\ & - \sum_{\substack{y \leq z \prec s_i w \\ s_i z < z}} \mu(z, s_i w) q^{\frac{l(w)-l(z)}{2}} P_{y,z}(q) \end{aligned}$$

（ただし、$s_i y < y$ のとき $c = 1$、$s_i y > y$ のとき $c = 0$）

という式、により帰納的に構成して、次に一意性を証明するという方針で示すので、

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} T_{s_i} C_w &= -C_w & (s_i w < w \text{ のとき}) \\ &= q\, C_w + q^{\frac{1}{2}} C_{s_i w} + \sum_{\substack{z \prec w \\ s_i z < z}} \mu(z, w) q^{\frac{1}{2}} C_z & (s_i w > w \text{ のとき}) \end{aligned}$$

が示されているわけです。

ここで $q = 1$ とおき、$C_w\,|_{q=1}$ を $a(w)$ とかけば、

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} s_i\, a(w) &= -a(w) & (\ s_i w < w\ ) \\ &= a(w) + a(s_i w) + \sum_{\substack{z \prec w \\ s_i z < z}} \mu(z, w)\, a(z) & (\ s_i w > w\ ) \end{aligned}$$

となります。 また、w_0を *longest element* $n\ n-1\ \dots\ 2\ 1$ として、

$$a_w = \sum_{y \geq w} (-1)^{l(y)-l(w)} P_{w_0 y, w_0 w}(1)\ y^{-1}$$

とおくと、KL 多項式の定義よりすぐにわかる性質である
$P_{y,w}(q) = P_{y^{-1},w^{-1}}(q)$ より $a_{w_0 w^{-1}} w_0 = a(w)$ です。

$y \underset{L}{\leq} w$ の意味. $\mathfrak{S}_n$ の 2 元、$y \neq w$ に対して、次の同値がなりたちます。

補題 (1.1). $\mathcal{L}(y) \supsetneq \mathcal{L}(w)$ かつ、$y \prec w$ または $w \prec y$ は次と同値。
ある s_i が存在して、$s_i a_{w_0 w^{-1}}$ を a_x たちの線型和にかきあらわしたとき、
$a_{w_0 y^{-1}}$ が非零係数であらわれる。

証明. ($\Rightarrow$) $s_i \in \mathcal{L}(y) \setminus \mathcal{L}(w)$ をとると、$y \prec w$ のときは (1.4) 式より
O.K. $w \prec y$ としよう。 KL 多項式の性質、$w < y$ かつ $s_i y < y$ ならば $P_{w,y}(q) = P_{s_i w, y}(q)$ を用いる。
(これは、(1.2) 式を用いて、$l(y)$ に関する帰納法で示せばよい。)
つまり、$s_i w \neq y$ ならば、$deg P_{w,y}(q) \leq \frac{l(y)-l(s_i w)-1}{2}$ と $s_i w > w$
より $\mu(w,y) = 0$ となり $w \prec y$ に反する。
($\Leftarrow$) $y = s_i w > w$ のとき $w \prec s_i w$ を示せばよい。 実際、KL 多項式の性質、$P_{y,w}(0) = 1$ (これも (1.2) 式から従う。) と、$deg P_{w,s_i w}(q) \leq 0$ より、$P_{w,s_i w}(q) = \mu(w, s_i w) = 1 \neq 0$。 ∎

系. $W = \mathfrak{S}_n$ とする。 $\{a_x\}$ の部分集合で張られ、$W a_{w_0 w^{-1}}$ を含む $\mathbb{Q}[W]$ の部分空間のうち最小のものを $< W a_{w_0 w^{-1}} >_a$ とかけば、

$$y \underset{L}{\leq} w \Leftrightarrow\ < W a_{w_0 y^{-1}} >_a\ \subseteq\ < W a_{w_0 w^{-1}} >_a$$

また、$\{a(x)\}$ の部分集合で張られ、$a(w)$ を含む $\mathbb{Q}[W]$ の 左イデアルのうち最小のものを $\overline{V_w}^L$ とおけば、

$$y \underset{L}{\leq} w \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{V_y}^L \subseteq \overline{V_w}^L$$

RS 対応と left cell. この章の目標は、次の定理の紹介です。

定理 A. $y, w \in \mathfrak{S}_n$ にたいし、$y \underset{L}{\sim} w \Leftrightarrow Q(y) = Q(w)$

例. $\mathfrak{S}_3$ の場合。 $y < w$ かつ $l(w) - l(y) \leq 2$ のときは、定義より $P_{y,w}(q) = 1$ なので、$P_{1,w_0}(q)$ のみ考えればよい。 $y < w$ かつ $s_i w < w$ のとき $P_{y,w}(q) = P_{s_i y,w}(q)$ なので、$P_{1,w_0}(q) = 1$ である。 ゆえに、$y \prec w$ となるのは、長さの差が 1 のときのみ。

よって、$y \underset{L}{\sim} w$ となるのは、$s_1 \underset{L}{\sim} s_2 s_1$ と $s_2 \underset{L}{\sim} s_1 s_2$ 。 ゆえに、*left cell* は、$\{123\}, \{213, 312\}, \{132, 231\}, \{321\}$ の 4 つで、それぞれ *Q-symbol* は、

$$\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array} \qquad \begin{array}{cc}1&3\\2&\end{array} \qquad \begin{array}{cc}1&2\\3&\end{array} \qquad \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}$$

$\mathfrak{S}_4$ については、[Sh] p.20 を参照してください。

Knuth の定理. $P(y) = P(w)$ のとき $y \equiv w$ とかくことにします。 Knuth によれば、この同値関係は次の Knuth の基本関係で生成されています。

$y = y_1 y_2 \dots y_i y_{i+1} y_{i+2} \dots y_n$ において、

$$y_{i+1} < y_i < y_{i+2} \text{ のとき } \quad w = y_1 \dots y_i y_{i+2} y_{i+1} \dots y_n$$

$$y_{i+1} < y_{i+2} < y_i \text{ のとき } \quad w = y_1 \dots y_{i+1} y_i y_{i+2} \dots y_n$$

とおくと、 $y \equiv w$ 。

ここで、 $D(\alpha_i\ ,\alpha_{i+1}) = \{\ w \mid ws_i < w,\ ws_{i+1} > w\ \}$ とします。 *coset*、 $y < s_i\ ,s_{i+1} >$ の *minimum length* の *representative* を y^0 とすると、 $y \in D(\alpha_i\ ,\alpha_{i+1})$ ならば、 $y = y^0 s_i$ または $y = y^0 s_{i+1} s_i$ です。 そこで、前者のとき $y^0 s_i s_{i+1}$ 後者のとき $y^0 s_{i+1}$ を $D(\alpha_i\ ,\alpha_{i+1})(y)$ とか、y^* という記号であらわします。 ここでは、$D_{i,i+1}(y)$ であらわすことにします。 すると Knuth の基本関係は次のようにいいかえられます。

$$y \in D(\alpha_i\ ,\alpha_{i+1}) \text{ のとき } \quad y \equiv D_{i,i+1}(y)$$

これは、$y < s_i y$ かつ $\mathcal{L}(y) \subsetneqq \mathcal{L}(s_i y)$ のとき $y^{-1} \equiv (s_i y)^{-1}$、というふうにもいいかえられます。

i と $i+1$ をとりかえることにより、 $D(\alpha_{i+1}\ ,\alpha_i)$ 、 $D_{i+1,i}(y)$ を同様に定義します。

定理Aの証明の準備.

命題 (1.2). $\quad y \underset{L}{\leq} w$ ならば、$\mathcal{L}(y^{-1}) \supseteqq \mathcal{L}(w^{-1})$

証明. $\quad \mathcal{L}(y) \subsetneqq \mathcal{L}(w)$ としてよい。 補題 (1.1) より $y = s_i w > w$ または $y \prec w$ である。 前者のときは O.K. 後者のとき、
$\mathcal{L}(w^{-1}) \subsetneqq \mathcal{L}(y^{-1})$ とすると $P_{y,w}(q) = P_{y^{-1},w^{-1}}(q)$ かつ $y \prec w$ より

$y^{-1} \prec w^{-1}$ であることに注意すると、$w^{-1} = s_j y^{-1} > y^{-1}$ となり、$\mathcal{L}(y) \not\subseteq \mathcal{L}(w)$ に反す。∎

命題 (1.3). $y, w \in D(\alpha_i\ , \alpha_{i+1})$ かつ $y \prec w$ ならば
$D_{i,i+1}(y) \prec D_{i,i+1}(w)$ または $D_{i,i+1}(w) \prec D_{i,i+1}(y)$

証明. $D_{i,i+1}$ の定義より結局次の 2 つの場合に $\mu(y_1, w_1) = \mu(y_2, w_2)$ を示せばよい。

(1) $y_2 t < y_2 = y_1 s < y_1 < y_1 t$ かつ $w_2 t < w_2 = w_1 s < w_1 < w_1 t$ のとき。
(ただし、$\{s, t\} = \{s_i, s_{i+1}\}$)
(1.2) 式より、$P_{y_1,w_1}(q) = P_{y_1^{-1},w_1^{-1}}(q) = P_{y_2,w_2}(q) + qP_{y_1,w_2}(q)$ - $\sum \ldots$ とかけて、最後の和にあらわれる $P_{y_1,z}(q)$ は $zs < z$ をみたす。 $zt > z$ とすると、$w_2 t < w_2$, $zt > z$, $z \prec w_2$ より $w_2 \doteq zt$ で (補題 (1.1)) $z = z^0$ となり、$zs < z$ に反す。
よって $z \neq y_1 t$ のとき $P_{y_1,z}(q) = P_{y_1 t,z}(q)$ は $\mu(y_1, w_1)$ に寄与しない。
ゆえに、$P_{y_1,w_2}(q) = P_{y_1 t,w_2}$ より従う。

(2) $y_2 s > y_2 = y_1 t > y_1 > y_1 s$ かつ $w_2 t < w_2 = w_1 s < w_1 < w_1 t$ のとき。
(1.2) 式より、$P_{y_1,w_1}(q) = P_{y_1 s,w_2}(q) + qP_{y_1,w_2}(q)$ - $\sum \ldots$ とかけて、$y_1 s \not\prec w_2$ ならば、最後の和も前と同様の理由で $\mu(y_1, w_1)$ に寄与しないので、命題は $P_{y_1,w_2}(q) = P_{y_2,w_2}(q)$ より従う。 $y_1 s \prec w_2$ ならば、$y_1 st = w_2$ なのでやはり命題は成立。∎

系. $y, w \in D(\alpha_i\ , \alpha_{i+1})$ のとき、
$y^{-1} \underset{L}{\sim} w^{-1}$ ならば $D_{i,i+1}(y)^{-1} \underset{L}{\sim} D_{i,i+1}(w)^{-1}$

証明. 命題 (1.2) と $y^{-1} \underset{L}{\sim} D_{i,i+1}(y)^{-1}$ より $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(D_{i,i+1}(y))$ 故、命題 (1.3) より従う。∎

命題 (1.4). $Q(y) = Q(w)$ ならば $y \underset{L}{\sim} w$

証明. $w^{-1} = D_{i,i+1}(y^{-1})$ としてよいので明らか。∎

定理 A の証明.

証明. 命題 (1.4) の逆を示す。 *partition* π に次図のように $1 \ldots n$ をかき込んでできる *tableau* を P_π とかく。

$$
\begin{array}{lll}
1 & l_1+1 & \cdots \\
2 & l_1+2 & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
l_1 & &
\end{array}
$$

$P(y) = P_{\pi_1}$, $P(w) = P_{\pi_2}$ としてよい。
$(P(y'), Q(y')) = (P_{\pi_1}, P_{\pi_1})$ により y' をさだめると

$$y' = D_{i_1,j_1} \circ \cdots \circ D_{i_r,j_r}(y)$$

とかける。 命題 (1.2) より、 $\mathcal{L}(y^{-1}) = \mathcal{L}(w^{-1})$ だから、 命題 (1.3) 系より、 $w' = D_{i_1,j_1} \circ \cdots \circ D_{i_r,j_r}(w)$ も *welldefined* で、
$\mathcal{L}((y')^{-1}) = \mathcal{L}((w')^{-1})$ かつ $P(w') = P_{\pi_2}$ 。

さて、

$$(y')^{-1} = l_1\ l_1-1\ \ldots\ 1\ l_1+l_2\ \ldots\ l_1+1\ \ldots$$

であり、 $(w')^{-1}$ の *word* とくらべたとき i と $i+1$ が転倒しているところは一致していて、 π_2 の第 1 列の長さを l_1' とすると最初の l_1' 個は単調に

減少しているので、$l_1 \leq l'_1$ を得る。 $(P(w''), Q(w'')) = (P_{\pi_2}; P_{\pi_2})$ により w'' をさだめると、上と同様の議論により今度は $l_1 \geq l'_1$ を得るから π_1 と π_2 の第1列めの長さは等しい。 以下同様にして $P_{\pi_1} = P_{\pi_2}$ が示せる。 よって $y' = w'$ となり $\therefore$ $Q(y) = Q(w)$ 。 ∎

2. primitive ideal の言葉にすると。

translation functor. $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の半単純リー環、$\mathfrak{b}$ を Borel 部分環、$\mathfrak{h}$ を Cartan 部分環、$U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{b})$, $U(\mathfrak{h})$ をその包絡環、有限生成 $U(\mathfrak{g})$ - 加群で *weight multiplicity* 有限の *weight* 分解をもち、$U(\mathfrak{b}) - finite$
(つまり各元が有限次元 $U(\mathfrak{b})$-*submodule* に含まれる。)
なもの全体のなす圏を $\mathcal{O}$ とします。

W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とし、ドット作用を $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$
(ρ は正ルートの和の半分。) で定めます。 Harish Chandra の定理によれば、$U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{h})$ の ドット作用での W の不変式環にひとしく、λ での *evaluation* により定まる $Z(\mathfrak{g})$ の一次元表現 (*central character*) を $[\lambda]$ とかくと、$[\lambda] = [\mu] \Leftrightarrow W \cdot \lambda = W \cdot \mu$ です。 そこで

$$\mathcal{O}_{[\lambda]} = \{ \ M \in \mathcal{O} \mid z - [\lambda](z) \text{ は } M \text{ 上 } nilpotent \ (\forall z \ ) \ \}$$

とおくと、$\mathcal{O} = \oplus \ \mathcal{O}_{[\lambda]}$ です。

highest weight λ の *Verma module* と *irreducible module* をそれぞれ $M(\lambda)$ と $L(\lambda)$ とすると、$\forall M \in \mathcal{O}$は、商が *highest weight module* であるような有限の長さの *filtration* をもつので、とくに M は組成商が $L(\lambda)$ の形の有限の長さの組成列をもち、$\mathcal{O}_{[\lambda]}$ の *Grothendieck* 群 $K_0(\mathcal{O}_{[\lambda]})$ は $\{ \ M(w \cdot \lambda) \ \}$ および $\{ \ L(w \cdot \lambda) \ \}$ を基底にもちます。

定義. $M \in \mathcal{O}_{[\lambda]}$ とし、μ を $\lambda - \mu$ が *integral weight* であるようにとる。

$\lambda - \mu$ の（ふつうの W-作用のもとでの）W-*orbit* の中で、*dominant integral* なものをとり、それを *highest weight* にもつ有限次元既約表現を E とする。このとき、

$T_\lambda^\mu(M) = pr_\mu(M \underset{\mathbf{C}}{\otimes} E)$（$pr_\mu$ は $\mathcal{O}_{[\mu]}$ への射影）とおくと、T_λ^μ は $\mathcal{O}_{[\lambda]}$ から $\mathcal{O}_{[\mu]}$ への *exact functor* である。とくに $K_0(\mathcal{O}_{[\lambda]})$ から $K_0(\mathcal{O}_{[\mu]})$ への *functor* を *induce* する。

[Ja2] にあるように、*translation functor* には次の性質があります。

命題 (2.1). (1) $\lambda + \rho$ と $\mu + \rho$ を *dominant integral weight* とし、任意の正ルート α にたいし、

$(\lambda + \rho\ , \alpha) = 0$ ならば $(\mu + \rho\ , \alpha) = 0$, が成り立つとする。このとき、

$T_\lambda^\mu(M(w \cdot \lambda)) \ = \ M(w \cdot \mu)$

(2) $\hat{F}_\lambda$ を、任意の正ルート α にたいし

$(\lambda + \rho\ , \alpha)$ が 正、0、負 のとき、$(\mu + \rho\ , \alpha)$ がそれぞれ正、0、0 以下 となり、かつ $\lambda - \mu$ が *integral* であるような *weight* μ の全体とする。また、λ と $\mu + \rho$ は *dominant integral weight* であるとする。

このとき、

$$T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda)) = \ L(w \cdot \mu) \quad (\ w \cdot \mu \in \hat{F}_{w \cdot \lambda}\ )$$
$$= \ 0 \qquad\qquad (\ otherwise\ )$$

証明. (1) Eを有限次元表現とする。$M(w \cdot \lambda) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} E$ には *successive quotient* が *highest weight* $w \cdot (\lambda + \nu)$（ν は E の *weight*）の *highest weight module* であるような *filtration* が存在し、指標をみるとこれらの *successive quotient* は $M(w \cdot (\lambda + \nu))$ であることがわかる。故に、

$\nu = \tau\cdot\mu - \lambda$ をみたす ν は $\mu - \lambda$ しかないことを示せばよい。
$|\,\nu\,| \leq |\,\lambda - \mu\,|$ に代入すると

$$(\lambda + \rho \ , \ \mu + \rho \ - \ \tau(\mu + \rho)\ ) \ \leq \ 0$$

を得る。 $\tau = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ なる *reduced expression* にたいして

$$\mu + \rho \ - \ \tau(\mu + \rho) \ = \ \sum_{(\mu+\rho,\alpha_{i_k})>0} (\mu + \rho \ , \alpha_{i_k}) s_{i_1}\ldots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$$

であることを用いると、$(\mu + \rho \ , \alpha_{i_j}) = 0 \ \ (\forall j < k)$, $(\mu + \rho \ , \alpha_{i_k}) > 0$ とはなり得ないことが示せるので、 $\therefore \ \ \nu = \mu - \lambda$ 。
(2) 指標で考えれば十分である。 $w\cdot\mu \in \hat{F}_{w\cdot\lambda}$ のとき。
この条件は、 $s_i\cdot\mu = \mu$ ならば $ws_i < w$ といいかえられる。
$L(w\cdot\lambda) = \sum_{w\leq y} a(w,y)M(y\cdot\lambda)$ とかいて、 $T_\lambda^\mu(L(w\cdot\lambda))$ 中の $L(w\cdot\mu)$ の重複度が 1 であることをみれば、$T_\lambda^\mu(L(w\cdot\lambda)) \neq 0$ がわかる。 $T_\lambda^\mu(L(w\cdot\lambda))$ の *proper submodule* の $M(w\cdot\mu) = T_\lambda^\mu(M(w\cdot\lambda))$ への *pull back* に $M(w'\cdot\mu)$ が含まれていれば、これは $w' > w$ でしかも $T_\lambda^\mu(M(w'\cdot\lambda))$ に等しいので、$T_\lambda^\mu(L(w\cdot\lambda))$ への像は 0 でなければならない。 よって $T_\lambda^\mu(L(w\cdot\lambda))$ は既約。

$w\cdot\mu \notin \hat{F}_{w\cdot\lambda}$ のとき。
$\exists\alpha > 0$ *such that* $w^{-1}\alpha > 0$ かつ $(\mu + \rho \ , \ w^{-1}\alpha) = 0$ である。 $w^{-1}\alpha$: *simple* としてよく、このとき (1) より $(\mu + \rho \ , \alpha_j) \neq 0 \ \ (\alpha_j \neq w^{-1}\alpha)$ なる μ にたいして示せば十分。 $T_\lambda^\mu(L(w\cdot\lambda))$ 中の $L(w\cdot\mu)$ の重複度は $1 + a(w, ws)$ (ただし、 s は $w^{-1}\alpha$ に対応する *reflection*) だから、$a(w,ws) = -[M(w\cdot\lambda) : L(ws\cdot\lambda)] \ = \ -1$ より 重複度は 0 。 よって $M(w\cdot\mu) \ \rightarrow \ T_\lambda^\mu(L(w\cdot\lambda))$ は 0-*map* 。 ∎

さて α_i $(1 \leq i \leq n-1)$ を、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ の基本ルート、Λ_i $(1 \leq i \leq n-1)$ を基本ウエイトとします。　つまり

$(\alpha_i\ ,\alpha_{i+1}^\vee) = -1$ 、　$(\alpha_i\ ,\alpha_j^\vee) = 0$ $(|\,i-j\,| > 1)$ 、

$(\Lambda_i\ ,\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ 。

すると、

系.

$$T_0^{-\Lambda_i}(L(w\cdot 0)) = L(w\cdot(-\Lambda_i)) \qquad (\ ws_i < w\ )$$
$$= 0 \qquad (\ ws_i > w\ )$$

Knuth の基本関係の表現論的意味.　$D_{i,i+1}(y)$ には、次のような表現論的意味があります。

命題 (2.2).　$y \in D(\alpha_i\ ,\alpha_{i+1})$ に対して

$$[\ T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y\cdot 0))\ ,\ L(w\cdot 0)\ ] \neq 0 \quad \text{かつ} \quad ws_{i+1} < w$$

をみたす w がただ1つ存在して $D_{i,i+1}(y)$ に等しい。

(証明は後述。)

primitive ideal.

定義.　$I(\lambda) = Ann_{U(\mathfrak{g})}(L(\lambda))$ を *primitive ideal* とよぶ。

補題 (2.3).　$M_1\ ,M_2 \in \mathcal{O}_{[\lambda]}$ とする。

このとき、$Ann_{U(\mathfrak{g})}(M_1) \subsetneqq Ann_{U(\mathfrak{g})}(M_2)$ ならば、

$Ann_{U(\mathfrak{g})}(T_\lambda^\mu(M_1)) \subseteqq Ann_{U(\mathfrak{g})}(T_\lambda^\mu(M_2))$

証明. Eを有限次元表現とする。 $c : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} U(\mathfrak{g})$ を、$c(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ $(X \in \mathfrak{g})$ の生成する単射準同型とする。 $J_i = c^{-1}(Ann(M_i) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} Ann(E))$ とおくと、 $J_i \subseteqq Ann(M_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E)$ は明らかで、 $U(\mathfrak{g})/J_i \to Hom_{\mathbb{C}}(M_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E,\ M_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E)$ は

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}) &\underset{c}{\to} U(\mathfrak{g})/Ann(M_i) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} U(\mathfrak{g})/Ann(E) \\ &\to Hom_{\mathbb{C}}(M_i, M_i) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} Hom_{\mathbb{C}}(E,E) \cong Hom_{\mathbb{C}}(M_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E,\ M_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E) \end{aligned}$$

なる単射とみなせるから、 $J_i = Ann(M_i \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E)$ 。

ゆえに、 $Ann(M_1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E) \subseteqq Ann(M_2 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E)$ である。 そして、一般に $M \in \mathcal{O}$ の組成列の長さを l とし、 $S \supseteqq \{ [\nu] \mid pr_\nu(M) \neq 0 \}$ とおくと

$$\begin{aligned} Ann(pr_\mu(M)) = \{ u \in U(\mathfrak{g}) \mid \\ u \cdot \prod_{[\nu] \in S \setminus \{[\mu]\}} (z - [\nu](z))^l \in Ann(M)\ (\forall z \in Z(\mathfrak{g})) \} \end{aligned}$$

であるから補題は示された。∎

定義. $T_\lambda^\mu(I(w \cdot \lambda)) = Ann(T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda)))$

この定義の *welldefinedness* は補題 (2.3) よりしたがいます。

部分リー環の primitive ideal との関係. S を 基本ルート系の部分集合、 $\mathfrak{g}_S$ を対応する半単純部分リー環、 $\mathfrak{h}_S = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_S$、 $\mathfrak{h}_S^\perp$ を S と直交する $\mathfrak{h}$ の *subspace* とします。 このとき次の命題が成り立ちます。

命題 (2.4). $\lambda|_{\mathfrak{h}_S^\perp} = \mu|_{\mathfrak{h}_S^\perp}$ かつ

$$Ann_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(\lambda|_{\mathfrak{h}_S})) \subseteqq Ann_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(\mu|_{\mathfrak{h}_S}))$$

ならば、 $I(\lambda) \subseteqq I(\mu)$。

(証明は後述)

primitive ideal と RS 対応. この章の目標は次の定理Bです。

定理B.

$$Q(y) = Q(w) \quad \Leftrightarrow \quad I(y\cdot 0) = I(w\cdot 0)$$

translation functor の性質 (命題 (2.1)) より $y\cdot 0$, $w\cdot 0$ のかわりに $y\cdot\lambda$, $w\cdot\lambda$ (λ は *dominant integral*) でもかまいません。

まず命題を1つ準備します。

命題 (2.5). (1) $y, w \in D(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ かつ $I(y\cdot 0) \subseteqq I(w\cdot 0)$ ならば、 $I(D_{i,i+1}(y)\cdot 0) \subseteqq I(D_{i,i+1}(w)\cdot 0)$

i と $i+1$ をとりかえても同様の結果が成り立つ。

(2) $y^{-1} \equiv w^{-1}$ ならば、$I(y\cdot 0) = I(w\cdot 0)$

証明. (1) 命題 (2.2) および命題 (2.1) 系より、

$$I(D_{i,i+1}(y)\cdot(-\Lambda_{i+1})) \subseteqq I(D_{i,i+1}(w)\cdot(-\Lambda_{i+1}))$$

である。 $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル I にたいして、

$$\sqrt{I} = \{\, u \in U(\mathfrak{g}) \mid (U(\mathfrak{g})u\,U(\mathfrak{g}))^{\exists l} \subseteqq I \,\}$$

とおくと、 命題 (2.2) より $T^0_{-\Lambda_{i+1}}(L(D_{i,i+1}(y)\cdot(-\Lambda_{i+1})))$ の組成列には $L(y\cdot 0)$ 以外には $T_0^{-\Lambda_{i+1}}(I(\tau\cdot 0)) = U(\mathfrak{g})$ であるような $L(\tau\cdot 0)$ しかあらわれないので、

$$\sqrt{T^0_{-\Lambda_{i+1}}(I(D_{i,i+1}(y)\cdot(-\Lambda_{i+1})))} = I(y\cdot 0) \cap I_1 \cap\cdots\cap I_r$$

(ただし、$T_0^{-\Lambda_{i+1}}(I_k) = U(\mathfrak{g})$ かつ $\sqrt{I_k} = I_k$ 。)
とかける。 よって $I(y\cdot 0)\cdot I_1\cdot \ldots \cdot I_r \subseteqq I(w\cdot 0)$ だから $L(w\cdot 0)$ に作用させて $I(y\cdot 0) \subseteqq I(w\cdot 0)$ を得る。

(2) $w^{-1} = D_{i,i+1}(y^{-1})$ にたいし示せば十分。 このとき、$y = s_i y^0$ かつ $w = s_{i+1}s_i y^0$ 、または $y = s_i s_{i+1} y^0$ かつ $w = s_{i+1}y^0$ である。

$S = \{\alpha_j\}$ として命題 (2.4) を適用すると、$(\mu+\rho, \alpha_j) > 0$ ならば $Ann_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(s_j\cdot\mu\,|_{\mathfrak{h}_S})) \subseteqq Ann_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(\mu\,|_{\mathfrak{h}_S}))$ より $I(s_j\cdot\mu) \subseteqq I(\mu)$ が示せる。 よって、$\mu = s_i y^0\cdot 0$ または $s_{i+1}y^0\cdot 0$ とすれば、$I(s_i y^0\cdot 0) \supseteqq I(s_{i+1}s_i y^0\cdot 0)$, $I(s_{i+1}y^0\cdot 0) \supseteqq I(s_i s_{i+1} y^0\cdot 0)$ である。 逆の包含関係を示すため $S = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ として命題 (2.4) を再び適用する。 $y^0\cdot 0+\rho$ は $\mathfrak{h}_S$ 上 *dominant integral regular* ゆえ、結局 A_2 型のときに *dominant integral* λ にたいして $I(s_i\cdot\lambda) \subseteqq I(s_{i+1}s_i\cdot\lambda)$, $I(s_{i+1}\cdot\lambda) \subseteqq I(s_i s_{i+1}\cdot\lambda)$ を示せばよい。 これは 命題 (2.1)、補題 (2.3)、および

$$I(s_i\cdot 0) = I(D_{i+1,i}(s_i s_{i+1})\cdot 0) \subseteqq I(D_{i+1,i}(s_{i+1})\cdot 0) = I(s_{i+1}s_i\cdot 0)$$

$$I(s_{i+1}\cdot 0) = I(D_{i,i+1}(s_{i+1}s_i)\cdot 0) \subseteqq I(D_{i,i+1}(s_i)\cdot 0) = I(s_i s_{i+1}\cdot 0)$$

からしたがう。∎

定理Bの証明.

証明. $(\Rightarrow)$ は命題 (2.5)(2) より明らか。 $(\Leftarrow)$ を示す。 定理Aと同様に P_π をさだめる。

$P(y) = P_{\pi_1}$、 $P(w) = P_{\pi_2}$ としてよい。

$(P(y'), Q(y')) = (P_{\pi_1}, P_{\pi_1})$ により y' をさだめると

$$y' = D_{i_1,j_1} \circ \cdots \circ D_{i_r,j_r}(y)$$

とかける。 ここで命題 (2.1) 系より、

$$\mathcal{L}(y^{-1}) = \{ s_i \mid T_0^{-\Lambda_i}(I(y \cdot 0)) \neq U(\mathfrak{g}) \}$$

に注意すればあとは定理Aと同じである。■

3. HC-module を用いれば。

HC-module.

定義. M を ($U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{g})$) -両側加群とし、$\mathfrak{g}_\Delta = \mathfrak{g}$ の M への作用を

$$X \cdot m = Xm - mX \quad (m \in M , X \in \mathfrak{g}_\Delta)$$

でさだめるとき、 M が $U(\mathfrak{g}_\Delta)$- *finite* ならば M を *Harish Chandra module* とよぶ。

M を両側加群とし、V をその半単純 $U(\mathfrak{g}_\Delta)$-部分加群とすると $U(\mathfrak{g})\otimes M$ の $U(\mathfrak{g}_\Delta)$-部分加群 $\mathfrak{g}\otimes V$ から M への自然な写像は $U(\mathfrak{g}_\Delta)$-*homomorphism* なので、M の $U(\mathfrak{g}_\Delta)$-*finite vectors* は *HC-module* になります。

HC-module M に対し、右作用での *annihilator* を $RAnn(M)$ 、左作用での *annihilator* を $LAnn(M)$ とかきます。 すると次の命題が成り立ちます。

命題 (3.1). X_1 , X_2 を有限生成 *HC-module* とすると、
$RAnn(X_1) \subseteqq RAnn(X_2)$
$\Leftrightarrow$
右作用が自明な有限次元 *HC-module* E が存在して、X_2 は $X_1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E$ の *subquotient* 。

証明. $(\Leftarrow)$ $RAnn(X_1) = RAnn(X_1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} E)$ より明らか。
$(\Rightarrow)$ X_i を生成する有限次元 $U(\mathfrak{g}_\Delta)$-部分加群 を V_i とする。
V_2 を $X\cdot v = Xv - vX$, $v\cdot X = 0$ ($X \in \mathfrak{g}$) により *HC-module* にすると、 全射

$$(U(\mathfrak{g})/RAnn(X_2)) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V_2 \;\rightarrow\; X_2 \;:\; u\otimes v \;\mapsto\; vu$$

が得られる。 また、$\nu\cdot X = 0$, $(X\cdot\nu)(v) = \nu(-Xv+vX)$ ($\nu \in V_1^*$) により V_1^* を *HC-module* とみなせば、V_1 の基底、$v_1\ldots v_r$ と その双対基底 $\nu_1\ldots\nu_r$ をもちいて、単射

$$U(\mathfrak{g})/RAnn(X_1) \;\rightarrow\; X_1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V_1^* \;:\; u \;\mapsto\; \sum v_i u\otimes \nu_i$$

が得られる。 故に $E = V_1^*\otimes V_2$ とすればよい。 ∎

さて、$U(\mathfrak{g})$-加群 M , N に対して、$Hom_{\mathbb{C}}(M, N)$ は $u_1\varphi u_2(m) = u_1(\varphi(u_2 m))$ により両側加群になるので、
その $U(\mathfrak{g}_{\Delta})$-*finite vectors* のなす部分両側加群を $L(M, N)$ とかきます。

命題 (3.2). $M \in \mathcal{O}_{[\mu]}$ かつ、λ , μ が *dominant integral* とすると、

$$[\, L(\, M(\lambda) \,,\, M \,) \,:\, L(\, M(\lambda) \,,\, L(w\cdot\mu) \,) \,] = [\, M \,:\, L(w\cdot\mu) \,]$$

命題 (3.3). λ , μ を *dominant integral* とすると、

$$RAnn(L(\, M(\lambda) \,,\, L(w\cdot\mu) \,)) = I(w^{-1}\cdot\lambda)$$

primitive ideal と 表現の重複度. この章では次の定理Cを紹介します。

定理C. λ , μ_1 , μ_2 を *dominant integral* とすると、
$I(y\cdot\lambda) \subsetneqq I(w\cdot\lambda)$
$\Leftrightarrow$
ある有限次元表現 E があって、$[\, L(y^{-1}\cdot\mu_1)\otimes E \,:\, L(w^{-1}\cdot\mu_2) \,] \neq 0$

証明. 命題 (3.3) (3.1) より左辺は、右作用が自明な有限次元 *HC-module* E があって $L(\, M(\lambda) \,,\, L(w^{-1}\cdot\mu_2) \,)$ が
$L(\, M(\lambda) \,,\, L(y^{-1}\cdot\mu_1) \,)\otimes E$ の *subquotient* であることと同値。

2番目のテンソル積は $L(\, M(\lambda) \,,\, L(y^{-1}\cdot\mu_1)\otimes E \,)$ に等しいので、命題 (3.2) より右辺と同値。 ∎

4. そして環はとじる。

primitive ideal と left cell.

$L(y\cdot 0) = \sum_{y\le w} a(y,w)\ M(w\cdot 0)$ とかくと、Kazhdan-Lusztig 予想とよばれる定理により、$a(y,w) = (-1)^{l(w)-l(y)} P_{w_0 w, w_0 y}(1)$ ですが、ここで

$$\chi_y(\mu) = \sum_{y\le w} a(y,w)\ M(w\cdot\mu)$$

により $\chi_y(\mu)$ を定義します。

定理.

$$I(y^{-1}\cdot 0) \subsetneqq I(w^{-1}\cdot 0) \quad \Leftrightarrow \quad a_w \in \ < W a_y >_a$$

証明. $(\Rightarrow)$ 定理Cより、有限次元表現 E が存在して、
$[\ L(y\cdot 0)\otimes E\ :\ L(w\cdot 0)\ ] \neq 0$ 。 $L(y\cdot 0)\otimes E = \sum \chi_y(\nu)$
(ただし ν は E の *weight* を重複度込みではしる。) なので、
$[\ \chi_y(\tau\cdot 0)\ :\ L(w\cdot 0)\ ] \neq 0$ となる τ がある。
そこで、$\tau^{-1}a_y = \sum[\ \tau^{-1}a_y\ :\ a_w\ ]\ a_w$ とかけば、

$$\chi_y(\tau\cdot 0) = \sum[\ \tau^{-1}a_y\ :\ a_w\ ]\ L(w\cdot 0)$$

なので O.K.

$(\Leftarrow)$ $\exists\tau$ s.t.
$[\ \chi_y(\tau\cdot 0)\ :\ L(w\cdot 0)\ ] \neq 0$ としてよい。 ここで、

$$\sum_{\tau} \mathbb{Z}\chi_y(\tau\cdot 0) = \sum_{E} \mathbb{Z}pr_0(L(y\cdot\lambda)\otimes E)$$

であるような *dominant integral* な λ がとれる。

実際、$\lambda - \tau \cdot 0$ が $\forall \tau$ に対して *dominant* になるようにとれば、$E = L(\lambda - w_0\tau \cdot 0)^*$ に対しては、

$$pr_0(L(y \cdot \lambda) \otimes E) = \chi_y(w_0\tau \cdot 0) + \sum \chi_y(w_0\sigma \cdot 0)$$

となり、和は $\sigma > \tau$ をはしるので、*transition matrix* が *unitriangular* だからである。

故に、$[\, L(y \cdot \lambda) \otimes E : L(w \cdot 0)\,] \neq 0$ となり、定理Cより O.K. ∎

この定理から、$y \underset{L}{\leq} w \quad \Leftrightarrow \quad I(ww_0 \cdot 0) \subseteqq I(yw_0 \cdot 0)$
がわかるので、定理Bより $y \underset{L}{\sim} w$ は、$Q(yw_0) = Q(ww_0)$ と同値で、さらに寺田君の解説にあるように、$Q(ww_0) = (Q(w)^I)'$ なので、$Q(y) = Q(w)$ とも同値。 こうして定理Aが再び示されました。

5. 証明してなかった命題の証明。

命題 (2.2) の証明.

(主張１) $\quad T^0_{-\Lambda_i}(M(w \cdot (-\Lambda_i))) = M(w \cdot 0) + M(ws_i \cdot 0)$

($\because$) 命題 (2.1) の証明と同様で定義通りに計算すればよく、$L(\Lambda_i)$ の *weight* ν で $w \cdot (-\Lambda_i + \nu) = \tau \cdot 0$ となるのが Λ_i と $s_i\Lambda_i$ に限ることを示せば十分である。

$|-\Lambda_i + \nu + \rho|^2 = |\rho|^2$ に、$|\Lambda_i| \geq |\nu|$ を代入すれば

$$(\Lambda_i - \nu\, ,\, \rho - \Lambda_i) \leq 0$$

となるので、ν は $\nu = \Lambda_i - m\alpha_i$ の形で、再び $|\nu|^2 \leq |\Lambda_i|^2$ に代入して $m = 0$ 、1 を得る。

(主張２)　$K_0(\mathcal{O}_{[0]})$ 中で、$T_0^{-\Lambda_i} T_{-\Lambda_i}^0$ は２倍写像。
(∵)　(主張１) と命題 (2.1) より明らか。

(主張３)　(1)　$ys_i < y$ のとき、非負整数 $b_{y,w}^{(i)}$ が存在して、$b_{y,ys_i}^{(i)} = 1$ かつ

$$\chi_y(s_i \cdot \mu) = \chi_y(\mu) + \sum_{ws_i > w} b_{y,w}^{(i)} \chi_w(\mu)$$

(2)　$ys_i > y$ のとき、$\chi_y(s_i \cdot \mu) = -\chi_y(\mu)$
（　$T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) = \chi_y(0) + \chi_y(s_i \cdot 0)$ だから、(1) よりとくに、命題 (2.2) の w の候補として、$ws_i > w$ を満たすもののみ考えればよいことがわかる。　）
(∵)　(1)　$M(\tau \cdot \mu)$ の係数たちの等式だと考えれば、$\mu = 0$ として十分。(主張１) より、

$$\begin{aligned} T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) &= L(y \cdot 0) + \chi_y(s_i \cdot 0) \\ &= aL(y \cdot 0) + bL(ys_i \cdot 0) + \sum_{w \neq y, ys_i} b_{y,w}^{(i)} L(w \cdot 0) \end{aligned}$$

とかける。　仮に最後の和に $ws_i < w$ の項があらわれると、

$$[\, T_0^{-\Lambda_i} T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) \ : \ L(w \cdot (-\Lambda_i)) \,] \neq 0$$

となり、(主張２) より $w \neq y$, ys_i に反す。　さらに

$$T_0^{-\Lambda_i} T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) = aL(y \cdot (-\Lambda_i))$$

となるので、 $a = 2$。 次に全射、

$$T^0_{-\Lambda_i} T_0^{-\Lambda_i}(M(y \cdot 0)) \to T^0_{-\Lambda_i} T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0))$$

を考えると、 $b \leq 1$。 仮に $b = 0$ とすると、
$M(y \cdot 0)$ から $T^0_{-\Lambda_i} T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0))$ への全射が得られるので、 $a = 2$ 反す。

(主張 4) $\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i \cdot 0) = \sum c_w \chi_w(0)$
とかけば、 $w s_{i+1} < w$ ならば $c_w = 0$
$(\because)$ (主張 3) より、

$$\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i (s_{i+1} \cdot 0)) = \chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_i s_{i+1} s_i \cdot 0) = -\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i \cdot 0)$$

なので、 $\sum c_w \chi_w(s_{i+1} \cdot 0) = -\sum c_w \chi_w(0)$ である。 故に
$\chi_w(0)$ の係数を見比べればよい。

(主張 3) を用いて、 $\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i : 0)$ を $\chi_w(0)$ たちであらわし、
$w_2 s_i > w_2$ かつ $w_2 s_{i+1} < w_2$ である w_2 に対して $\chi_{w_2}(0)$ の係数を見ると、(主張 4) より $w_2 \neq y^0 s_i s_{i+1}$ ならば、

$$\sum_{\substack{w_1 s_{i+1} > w_1 \\ w_1 s_i < w_1}} b^{(i+1)}_{y^0 s_i s_{i+1}, w_1} b^{(i)}_{w_1, w_2} = 0$$

となる。 つまり、

(主張 5) $w_1 \in D(\alpha, \alpha_{i+1})$ かつ $w_2 \in D(\alpha_{i+1}, \alpha_i)$ かつ
$w_2 \neq y^0 s_i s_{i+1}$ ならば、 $b^{(i+1)}_{y^0 s_i s_{i+1}, w_1} b^{(i)}_{w_1, w_2} = 0$

同様に今度は $\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(0)$ の係数を見ると、

$$-1 + b^{(i+1)}_{y^0 s_i s_{i+1}, y^0 s_i} b^{(i)}_{y^0 s_i, y_0 s_i s_{i+1}} + b^{(i+1)}_{y^0 s_i s_{i+1}, y^0 s_{i+1} s_i} b^{(i)}_{y^0 s_{i+1} s_i, y^0 s_i s_{i+1}}$$
$$+ \sum_{\substack{w \notin y < s_i, s_{i+1} > \\ w s_{i+1} > w \\ w s_i < w}} b^{(i+1)}_{y^0 s_i s_{i+1}, w} b^{(i)}_{w, y^0 s_i s_{i+1}} = 0$$

ここで最後の和は 0 である。 実際、$w = w^0 s_i$ のときは、$b^{(i+1)}_{w^0 s_i s_{i+1}, w^0 s_i} = 1$ と（主張 5 ）より、$b^{(i)}_{w, y^0 s_i s_{i+1}}$ が 0 で、$w = w^0 s_{i+1} s_i$ のときは、$b^{(i)}_{w^0 s_{i+1} s_i, w^0 s_{i+1}} = 1$ と（主張 5 ）より、$b^{(i+1)}_{y^0 s_i s_{i+1}, w}$ が 0 だからである。

同様にして、$b^{(i+1)}_{y^0 s_i s_{i+1}, y^0 s_{i+1} s_i}$ も 0。 よって、

（主張 6 ） $b^{(i)}_{y^0 s_i, y^0 s_i s_{i+1}} = 1$

（命題 (2.2) の証明） $y = y^0 s_i$ のときは、（主張 5 ）より、$w s_{i+1} < w$ $w s_i > w$ かつ $w \neq y^0 s_i s_{i+1}$ ならば $b^{(i)}_{y^0 s_i, w} = 0$ なので（主張 6 ）より O.K.

$y = y^0 s_{i+1} s_i$ のときは、$w s_i > w$, $w s_{i+1} < w$ かつ $w \neq y^0 s_{i+1}$ ならば $b^{(i)}_{y^0 s_{i+1} s_i, w} = 0$ であることを示せばよいが、ここで i と $i+1$ をいれかえた式を示しても同じである。 すると、$w = w^0 s_{i+1} s_i$ のとき（主張 5 ）と $b^{(i)}_{w^0 s_{i+1} s_i, w^0 s_{i+1}} = 1$ より O.K. で $w = w^0 s_i$ のとき（主張 5 ）と $b^{(i)}_{w^0 s_i, w^0 s_i s_{i+1}} = 1$ （主張 6 ） より O.K.

命題 (2.4) の証明.

$\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{n}^+$ を *anti Borel* と *Borel* の *nilradical* とします。

$$U(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{n}^+) \oplus U(\mathfrak{h})$$

から $U(\mathfrak{h})$ への自然な射影を ϕ とし、

$$\phi_S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})$$
$$\phi^S : U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{h})$$

なる２つの射影も同様に定義します。 $\phi = \phi^S \circ \phi_S$ です。

（主張） $I(\lambda) = \{ u \in U(\mathfrak{g}) \mid \lambda(\phi(U(\mathfrak{g})uU(\mathfrak{g}))) = 0 \}$

$(\because)$ $L(\lambda)$ の *highest weight vector* を v_λ とする。 $u \in I(\lambda)$ は $U(\mathfrak{g})uU(\mathfrak{g})v_\lambda$ が $L(\lambda)$ の *proper submodule* であることと同値。

（命題 (2.4) の証明） λ を *highest weight* にもつ既約 $U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})$- 加群を $\hat{L}(\lambda)$ とかくと、

$$Ann_{U(\mathfrak{g}_S+\mathfrak{h})}(\hat{L}(\lambda))$$
$$= Ann(L(\lambda\,|_{\mathfrak{h}_S})) \otimes U(\mathfrak{h}_S^{\perp}) + U(\mathfrak{g}_S) \otimes \mathrm{Ker}(\lambda\,|_{U(\mathfrak{h}_S^{\perp})})$$

より、 $Ann(\hat{L}(\lambda)) \subseteqq Ann(\hat{L}(\mu))$ 。 ここで、

$$\phi(U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})uU(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})) = \phi^S(U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})\phi_S(u)U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h}))$$

と（主張）より $\phi_S(I(\lambda)) \subseteqq Ann(\hat{L}(\lambda))$ だから、 $u \in I(\lambda)$ なら（主張）より $\mu(\phi(u)) = 0$ 。 $I(\lambda)$ が両側イデアルであることに注意すると、再び（主張）より $I(\lambda) \subseteqq I(\mu)$ 。

命題 (3.2) の証明. 以下では λ , μ , ν を *dominant integral* とします。 すると、

$$[\, L(\, M(\lambda)\, ,\, M(w\cdot\mu)\,)\,|_{U(\mathfrak{g}_\Delta)} \ :\ L(\nu)\,]$$
$$= dim\ Hom_{U(\mathfrak{g})}(\, M(\lambda)\, ,\, L(\nu)^* \otimes M(w\cdot\mu)\,)$$

であり、λ が *dominant* よりさらに、

$$dim\ (L(\nu)^*)^{\lambda - w\cdot\mu} = dim\ L(\nu)^{w\cdot\mu-\lambda}\ (weight\ space\ \text{の次元})$$

に等しいわけですから、

定義. $w\cdot\mu - \lambda$ の W-軌道の中で *dominant* なものを ν_w とかけば、$L(\ M(\lambda)\ ,\ M(w\cdot\mu)\ )$ にあらわれる $L(\nu)$ は $\nu_w \leq \nu$ を満たす。
これを *min K-type* とよぶ。

(主張１) $L(\ M(\lambda)\ ,\ L(w\cdot\mu)\ ) \neq 0$
$(\because)$ $M(\lambda)$ は *projective object* 故 $L(\ M(\lambda)\ ,\ *\ )$ は *exact functor* 。
故に、 $M(w'\cdot\mu) \subsetneq M(w\cdot\mu)$ のとき

$$[\ L(\ M(\lambda)\ ,\ M(w'\cdot\mu)\ )\ :\ L(\nu_w)\ ] = 0$$

を示せばよいが、仮にそうでないとすると $L(\nu_w)^{\nu_{w'}} \neq 0$ なので、$\nu_w = \nu_{w'}$ つまり $w = w'$ で矛盾。

(主張２) $X\ ,Y$ を有限生成 *HC-module* で、 右作用に関して $\mathcal{O}_{[\lambda]}$ に属するとする。 このとき、

$$\begin{aligned} &Hom_{(U(\mathfrak{g}),U(\mathfrak{g}))}(\ X\ ,\ Y\ ) \\ &\quad \simeq Hom_{U(\mathfrak{g})}(\ X \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M(\lambda)\ ,\ Y \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M(\lambda)\ ) \end{aligned}$$

$(\because)$ X と Y がこのような

HC-module のなす圏において *projective* ならば、 これらは右作用が自明な

有限次元 *HC-module* E と $U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda))$ のテンソル積の直和因子だから、このとき（主張２）は

$$Hom_{(U(\mathfrak{g}),U(\mathfrak{g}))}(\ E \otimes U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda))\ ,\ E \otimes U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda))\ )$$
$$\to\ Hom_{U(\mathfrak{g})}(\ E \otimes M(\lambda)\ ,\ E \otimes M(\lambda)\ )$$

が単射であることと両辺の次元がともに $dim\ (E^* \otimes E)^0$ に等しいことからしたがう。

ここで左辺の次元を計算するには

$$dim\ Hom_{\mathfrak{g}}(\ E\ ,\ U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda))\ )\ =\ E^0$$

をもちいるわけだが、 これは $S(\mathfrak{g})$ の調和多項式の全体 H が表現としては $\sum dim(L(\nu)^0)L(\nu)$ に等しいことより従う。

X が *projective* で Y が任意のときは、
$P_1 \to P_2 \to Y$ (P_1 , P_2 は *projective*) にたいして可換図式をかけば示せる。

$X\ ,Y$ ともに任意のときも同様である。

（命題 (3.2) の証明）　（主張２）より *indecomposable projective* は $* \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M(\lambda)$ により *indecomposable projective* にうつる。　故に既約成分の重複度を調べれば

$$L(\ M(\lambda)\ ,\ L(w \cdot \mu)\ ) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M(\lambda)\ \to\ L(w \cdot \mu)$$

は同型であることがわかる。　こうして、有限生成で右作用が $\mathcal{O}_{[\lambda]}$ に、左作用が $\mathcal{O}_{[\mu]}$ に属する *HC-module* のなす圏と $\mathcal{O}_{[\mu]}$ の圏同値が得られたので、題意は示された。

命題 (3.3) の証明. θ を 正ルートを一斉に負ルートにうつす $\mathfrak{g}$ の *automorphism* とし、$X^t = -\theta(X) \quad (X \in \mathfrak{g})$ により転置をさだめる。 $L(M(\mu), L(w^{-1}\cdot\lambda))$ を、$u_1\cdot\varphi\cdot u_2 = u_2^t\varphi u_1^t$ により *HC-module* とみなしたものを考えると、これは $L(M(\lambda), L(w\cdot\mu))$ と同型である。 実際、*translation functor* をほどこすことを考えれば $\lambda - w\cdot\mu$ が全て *dominant* であるときを示せば十分で、このとき *min K-type* ν_w は全て異なるので、同型を示すには *min K-type* が一致することを見ればよい。

故に命題 (3.3) は、$LAnn(L(M(\mu), L(w^{-1}\cdot\lambda))) = I(w^{-1}\cdot\lambda)$ より従う。

References

[Dix]. J.Dixmier, "Enveloping Algebras," North-Holland, 1977.

[Ja1]. J.C.Jantzen, "Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren," SpringerVerlag, 1983.

[Ja 2]. J.C.Jantzen, "Moduln mit einem höchsten Gewicht," Springer LN 750, 1979.

[Bo]. W.Borho, *Survey on Enveloping Algebras of semisimple Lie Algebras*, CMS Conference Proceedings **5** (1984), 19 – 50.

[Sh]. Shi Jian-Yi, "The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups," Springer LN 1179, 1986.

[L]. G.Lusztig, *The two-sided cells of the affine Weyl group of type* $\tilde{A}_n$, in "Infinite-dimensional groups with applications," V.G.Kac ed., MSRI publications, vol. 4, Springer-Verlag, 1985, pp. 275–283.